

16. Rabinovich V. A., Vasserman A. A., Nedostup V. I. *Teplofizicheskie svoystva neona, argona, kriptona i ksenona* [Thermodynamic properties of neon, krypton and xenon]. Moscow, Izdatel'stvo standartov Publ., 1975. 636 p.
17. Sychev V. V., Vasserman A. A., Zagorutschenko V. A., Kozlov A. D., Spiridonov G. A., Tsymarny V. A. *Termodinamicheskie svoystva metana* [Thermodynamic properties of methane]. Moscow, Izdatel'stvo standartov Publ., 1979. 348 p.
18. Bachinskiy A. I. *Izbrannye trudy* [Selected works]. Moscow, Izdatel'stvo AN SSSR Publ., 1960. 414 p.
19. Meyson E. A., Sperling, T. H. *Virtual'noe uravnenie sostoyaniya* [Virial state equation]. Moscow, Mir Publ., 1972. 280 p.
20. Shekhtman A. M. *Gazodinamicheskie funktsii real'nykh gazov : Spravochnik* [Gasdynamic functions of real gases: reference]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1988. 175 p.
21. Istomin V. A. Pokazateli izoentropy real'nogo gaza : osobennosti ikh primeneniya v termo-gazodinamike [Isentropic indicators of real gas: features of their application in thermogasdynamics]. *Zhurnal fizicheskoy khimii* [Journal of physical chemistry]. 1998, vol. 72, no. 3, pp. 409–415.
22. Tegeler Ch., Span R., Wagner, W. A New Equation of State for Argon Covering the Fluid Region for Temperatures from the Melting Line to 700 K at Pressures up to 1000 MPa. *J. Phys. Chem. Ref. Data*, 1999, 28(3), pp. 779–850.

Received (надійшла) 08.09.2018

Information about authors / Відомості про авторів / Сведения об авторах

Shevchenko Sergey Andreevich (Шевченко Сергій Андрійович, Шевченко Сергей Андреевич) – candidate of technical sciences, leading scientific worker at the Department of LRE Control Units, Yuzhnoye State Design Office, Dnipro; e-mail: info@yuzhnoe.com.

Konokh Vladimir Ivanovich (Конох Володимир Іванович, Конох Владимир Иванович) – candidate of technical sciences, head of the Department of LRE Control Units, Yuzhnoye State Design Office, Dnipro; e-mail: info@yuzhnoe.com.

Mitkov Yuriy Alekseevich (Мітків Юрій Олексійович, Митков Юрий Алексеевич) – candidate of technical sciences, associate professor, head of the Department of Rocket Engines, Oles Gonchar Dnipro National University, Dnipro; e-mail: mitkov2017@gmail.com.

Grigoriev Alexandr L'vovich (Григор'єв Олександр Львович, Григорьев Александр Львович) – doctor of technical sciences, professor, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkov; tel.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

УДК 539.3

Е. Г. ЯНЮТИН, Г. А. ГНАТЕНКО, П. А. ЕГОРОВ**НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК**

Предложен метод идентификации нестационарной нагрузки, воздействующей на шарнирно-опертые подкрепленные цилиндрические оболочки. Рассмотрены два случая: подкрепление деформирующегося объекта по всей длине охватывающей оболочки, подкрепление ребрами жесткости, ширина которых мала по сравнению с длиной оболочки. В качестве вспомогательного этапа решения основной задачи приводится решение прямой задачи по исследованию деформированного состояния системы, достоверность которого подтверждается путем сопоставления с МКЭ. Достоверность решения задачи идентификации подтверждена путем сопоставления с исходными данными соответствующей прямой задачи. Интегральные уравнения Вольтерра, получаемые при решении задач, анализируются численно. Некорректность поставленных задач преодолевается с использованием метода регуляризации А.Н. Тихонова.

Ключевые слова: оболочка, ребро жесткости, условие контакта, ряд Фурье, преобразование Лапласа, метод регуляризации.

Є. Г. ЯНЮТИН, Г. О. ГНАТЕНКО, П. А. ЄГОРОВ**НЕСТАЦІОНАРНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ПІДКРІПЛЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК**

Запропоновано метод ідентифікації нестационарного навантаження, яке діє на шарнірно-оперті підкріплені циліндричні оболонки. Розглянуто два випадки: підкріплення об'єкту, що деформується, за всією довжиною оболонкою, що охоплює дану, підкріплення ребрами жорсткості, ширина котрих є малою у порівнянні з довжиною оболонки. У якості допоміжного етапу розв'язку основної задачі наводиться розв'язок прямої задачі з дослідження деформованого стану системи, достовірність якого підтверджується шляхом зіставлення з МСЕ. Достовірність розв'язку задачі ідентифікації підтверджена шляхом зіставлення з вихідними даними відповідної прямої задачі. Інтегральні рівняння Вольтерра, які отримані при розв'язку задач, аналізуються чисельно. Некоректність поставлених задач долається за допомогою методу регуляризації А. Н. Тихонова.

Ключові слова: оболонка, ребро жорсткості, умова контакту, ряд Фур'є, перетворення Лапласа, метод регуляризації.

YE. G. YANYUTIN, G. A. GNATENKO, P. A. YEGOROV**NONSTATIONARY DEFORMATION OF REINFORCED CYLINDRICAL SHELLS**

The article suggests a method of identifying nonstationary load acting on hinged reinforced cylindrical shells. Two cases are considered: reinforcement of a deformable object along the entire length with enclosing shell, reinforcement with stiffeners whose width is small compared to the length of the shell. As a substep of solving the main problem, the solution of the direct problem of studying the deformed state of the system is given. The reliability of solving the direct problem is confirmed by comparison with FEM. The reliability of the identification problem solution is confirmed by comparison with the initial data for the corresponding direct problem. Volterra integral equations obtained in the process of solving the problems are numerically analyzed. The ill-posedness of the problem is succeeded with using Tikhonov's regularization method.

Key words: shell, stiffener, contact condition, Fourier series, Laplace transformation, regularization method.

© Е. Г. Янютин, Г. А. Гнатенко, П. А. Егоров, 2018

Введение. Зачастую в процессе проектирования различных конструкций, в частности оболочечного типа, возникают вопросы правильного выбора величины и характера изменения во времени воздействующих нагрузок, которые, как правило, являются неизвестными. Их знание позволяет уже на стадии создания конструкции произвести прочностной расчет в полном объеме и установить наиболее удачные параметры исследуемой конструкции с целью обеспечения заданной прочности, несущей способности и долговечности. Упомянутое приводит к необходимости решения так называемых обратных задач, а именно задач, заключающихся в обращении причинно-следственных связей между деформациями и нагрузками.

Современные математические методы и вычислительная техника позволяют решать весьма сложные обратные задачи. Однако, принципиальные трудности, возникающие в процессе решения таких задач, требуют разработки специальных подходов и методов их исследования. Разработке методов решения обратных задач в области нестационарной механики деформируемого твердого тела для конструкций в виде подкрепленных оболочек и посвящено данное исследование.

Анализ последних исследований. Решение многих практических задач, связанных с исследованием динамического деформирования оболочек, приведено в монографии [1]. Авторами исследованы проблемы нестационарной динамики конструктивно неоднородных оболочечных конструкций: оболочки с отверстиями, дискретно подкрепленные оболочки, многослойные оболочки, оболочки с жидкостью. Представлены результаты исследования напряженно-деформированного состояния при нестационарных осесимметричных и неосесимметричных нагрузках в широком диапазоне изменений геометрических и физико-механических параметров объектов. Рассмотрены различные численные алгоритмы решения начально-краевых задач теории подкрепленных оболочек и приведены численные результаты по динамическому деформированию указанных конструкций.

В публикациях [2, 3, 4] приведены результаты исследований динамики оболочечных конструкций при взрывных нагрузках. С применением различных моделей исследовано нестационарное деформирование взрывных камер.

Значительное число исследований, направленных на решение прямых и обратных задач, содержится в монографиях [5, 6]. Развитие методов идентификации нестационарных нагрузок, воздействующих на различные механические объекты, в особенности составные и подкрепленные, представляет значительный интерес.

Постановка задачи. Рассмотрим процесс деформирования подкрепленных изотропных круговых цилиндрических оболочек. В первом случае механическая система состоит из вложенных друг в друга без зазора и натяга двух цилиндрических оболочек одинаковой длины, деформирующихся осесимметрично (рис. 1, а). При совместном деформировании нормальные перемещения оболочек совпадают по всей их длине. Условия контакта сопряженных поверхностей оболочек исключают их взаимное проскальзывание, вследствие чего осевые перемещения оболочек совпадают на цилиндрических поверхностях контакта. Этими поверхностями контакта для внутренней оболочки является внешняя лицевая поверхность, а для охватывающей оболочки – её внутренняя лицевая поверхность. К внутренней оболочке прикладывается некоторая нормальная возмущающая нагрузка, равномерно распределенная по некоторому участку вдоль длины оболочки, вследствие чего рассматриваемая система оболочек совершает колебания. Схема системы вложенных оболочек и прикладываемой к ней нагрузки изображена на рис. 1, а.

Во втором случае подкрепление оболочки осуществлено с помощью присоединения ребра жесткости, ширина которого мала по сравнению с длиной объекта исследования (рис. 1, б). Подкрепляющее ребро жесткости закреплено без возможности проскальзывания. К внутренней поверхности оболочки приложена распределенная нестационарная сила.

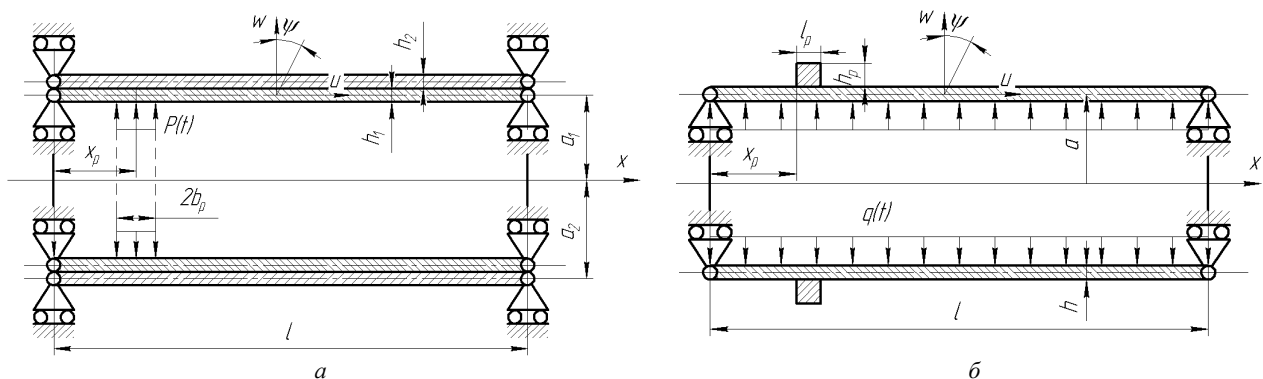


Рис. 1 – Схемы исследуемых механических систем:

а – подкрепление по всей длине; б – подкрепление ребром, ширина которого мала по сравнению с длиной оболочки.
На рисунке: w – радиальные перемещения; u – осевые перемещения; ψ – угол поворота нормали к срединной поверхности;
 l – длина оболочки; h , h_1 , h_2 – толщины оболочек; a , a_1 , a_2 – радиусы оболочек; l_p – ширина ребра жесткости;
 h_p – толщина ребра жесткости; $P(t)$, $q(t)$ – возмущающие нагрузки; $2b_p$ – ширина площадки нагружения;
 x_p – координата приложения нагрузки либо расположения ребра жесткости на рис. а и б соответственно.

В рамках решения обратной задачи необходимо идентифицировать возмущающее воздействие, при этом

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, № 27 (1303) 2018.

одна из кинематических характеристик движения оболочки (радиальное, осевое перемещение, угол поворота нормали к срединной поверхности) или деформация в некоторой точке является известной. Как вспомогательный этап, решению обратной задачи по поиску неизвестного возмущающего воздействия будет предшествовать решение прямой задачи по исследованию деформированного состояния оболочки под действием известной нагрузки.

Решение прямой задачи. Изучение процесса деформирования дискретно-структурной механической системы (рис. 1, а) можно производить на основе подходов, опубликованных в [7]. Так, для каждого слоя можно принять справедливой гипотезу ломаной нормали. В соответствии с этой гипотезой, нормаль к срединной поверхности слоя до деформации остаётся прямолинейной и после деформации, но не перпендикулярной к деформированной координатной поверхности.

Для исследования деформирования оболочек воспользуемся уравнениями, учитывающими влияние инерции вращения и поперечного сдвига [8]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_j}{\partial \xi^2} + \frac{\nu_j l}{a_j} \frac{\partial w_j}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial t_j^2} = \frac{l^2}{E'_j} n_j(\xi, t_j); \\ \bar{k}_j \left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial \xi^2} + l \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{a_j} \left(\frac{l^2}{a_j} w_j + \nu_j l \frac{\partial u_j}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial^2 w_j}{\partial t_j^2} = \frac{l^2}{E'_j} q_j(\xi, t_j); \\ \frac{h_j^2}{12} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \xi^2} - \bar{k}_j \left(l \frac{\partial w_j}{\partial \xi} + \psi_j l^2 \right) - \frac{h_j^2}{12} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t_j^2} = \frac{l^2}{E'_j} m_j(\xi, t_j), \end{cases} \quad (1)$$

где $j=1; 2$ – индекс, обозначающий параметры внутренней и наружной оболочек соответственно; E'_j – модуль упругости материала оболочки; ν_j – коэффициент Пуассона; \bar{k}_j – коэффициент сдвига; a_j – радиус срединной поверхности; h_j – толщина оболочки; l – длина оболочки; $n(\xi, t_j)$, $q(\xi, t_j)$, $m(\xi, t_j)$ – интенсивность сил и моментов, действующих на оболочку; ξ – безразмерная координата.

Рассмотрим более детально некоторый участок оболочек и воздействующие на них нагрузки (рис. 2).

На рис. 2 изображены фрагменты контактирующих оболочек, а также все нагрузки, воздействующие в области контакта на каждую из оболочек ($n_j(\xi, t_j)$ и $q_j(\xi, t_j)$ – осевые и контактные реакции соответственно).

Подчеркнем, что в процессе деформирования на сопряженных поверхностях оболочек возникают некоторые неизвестные нагрузки. В соответствии с применяемой теорией деформирования оболочек и условием контакта сопряженных поверхностей, запишем следующие кинематические зависимости:

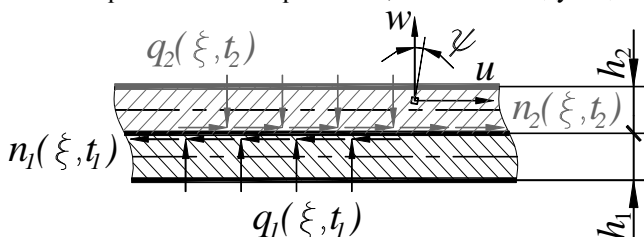


Рис. 2 – Участок системы вложенных оболочек.

$$w_1(\xi, t_1) = w_2(\xi, t_2);$$

$$u_1(\xi, t_1) + \frac{h_1}{2} \psi_1(\xi, t_1) = u_2(\xi, t_2) - \frac{h_2}{2} \psi_2(\xi, t_2). \quad (2)$$

Справедливы и следующие динамические соотношения между функциями нагрузок:

$$q_1(\xi, t_1) = -q_2(\xi, t_2); \quad n_1(\xi, t_1) = -n_2(\xi, t_2). \quad (3)$$

Осевые нагрузки, возникающие на поверхности каждой оболочки, можно заменить нагрузками на нейтральной линии, а именно: соответствующими осевой нагрузкой и изгибающим моментом $0.5h_j \cdot n_j(\xi, t_j)$.

Приведенная система уравнений (1) такова, что из неё путем элементарных алгебраических операций можно исключить все контактные нагрузки: нормальные, касательные и моментные. Если обозначить через $w_1 = w_2 = w$, то на основе уравнений (1) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^2 E'_j \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial \xi^2} + \frac{\nu_j l}{a_j} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial t_j^2} \right) = 0; \\ \sum_{j=1}^2 E'_j \left(\bar{k}_j \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + l \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{a_j} \left(\frac{l^2}{a_j} w + \nu_j l \frac{\partial u_j}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial t_j^2} \right) = l^2 q(\xi, t_1); \\ \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \frac{E'_j}{h_j} \left(\frac{h_j^2}{12} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \xi^2} - \bar{k}_j \left(l \frac{\partial w}{\partial \xi} + \psi_j l^2 \right) - \frac{h_j^2}{12} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t_j^2} \right) = 0; \\ \frac{\partial^2 u_j}{\partial \xi^2} + \frac{\nu_j l}{a_j} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial t_j^2} - \frac{2}{h_j} \left(\frac{h_j^2}{12} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \xi^2} - \bar{k}_j \left(l \frac{\partial w}{\partial \xi} + \psi_j l^2 \right) - \frac{h_j^2}{12} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t_j^2} \right) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $q(\xi; t_1)$ – функция возмущающей нагрузки, прикладываемой к первой оболочке.

Укажем, что рассматривается только случай внешней нагрузки, приложенной к внутренней оболочке, как основному объекту исследования.

Запись системы уравнений (4) несколько упростится, если ввести следующие величины:

$$C_E = E'_2/E'_1; \quad C_t = \frac{t_1}{t_2} = \frac{E_1 \rho_2 (1 - \nu_2^2)}{E_2 \rho_1 (1 - \nu_1^2)}. \quad (5)$$

Из второго соотношения в (2) вытекает следующее равенство:

$$\psi_2 = \frac{2}{h_2} \left(u_2 - u_1 - \frac{h_1}{2} \psi_1 \right). \quad (6)$$

После подстановки выражений (5) и (6) в уравнение (4) получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \frac{\nu_1 l}{a_1} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + C_E \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} + \frac{\nu_2 l}{a_2} \frac{\partial w}{\partial \xi} - C_t \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right) = 0; \\ \bar{k}_1^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + l \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{a_1} \left(\frac{l^2}{a_1} w + \nu_1 l \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + C_E \left(\bar{k}_2^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + l \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{2}{h_2} \left(u_2 - u_1 - \frac{h_1}{2} \psi_1 \right) \right) \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{a_2} \left(\frac{l^2}{a_2} w + \nu_2 l \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \right) - C_t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = l^2 q(\xi, t); \\ \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} - \bar{k}_1^2 \left(l \frac{\partial w}{\partial \xi} + \psi_1 l^2 \right) - \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - C_E \frac{h_1}{h_2} \left(\frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{2}{h_2} \left(u_2 - u_1 - \frac{h_1}{2} \psi_1 \right) \right) - \right. \\ \left. - \bar{k}_2^2 \left(l \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{2}{h_2} \left(u_2 - u_1 - \frac{h_1}{2} \psi_1 \right) l^2 \right) - C_t \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{2}{h_2} \left(u_2 - u_1 - \frac{h_1}{2} \psi_1 \right) \right) \right) = 0; \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \frac{\nu_1 l}{a} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{2}{h_1} \left(\frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} - \bar{k}_1^2 \left(l \frac{\partial w}{\partial \xi} + \psi_1 l^2 \right) - C_t \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \right) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где t – безразмерное время; $t = t_1 = \bar{t} \sqrt{E_1} / l \sqrt{\rho_1 (1 - \nu_1^2)}$.

В соответствии с принятыми граничными условиями (шарнирное опирание оболочек по торцам с возможностью проскальзывания шарнира вдоль оси Ox) разложение искомых функций может быть найдено в виде

$$u_j(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{jk}(t) \cos \lambda_k \xi; \quad w(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \sin \lambda_k \xi; \quad \psi_j(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_{jk}(t) \cos \lambda_k \xi, \quad (8)$$

где $\lambda_k = k\pi$, $\psi(\xi, t) = \psi_1(\xi, t)$.

Подставим разложения (8) в систему уравнений (7) и, применив к ним преобразование Лапласа по переменной времени t , перейдем к следующей алгебраической системе для изображений искомых функций:

$$\begin{cases} \left(s^2 + \lambda_k^2 \right) u_{1k}^L - l \lambda_k \left(\frac{\nu_1}{a_1} + C_E \frac{\nu_2}{a_2} \right) w_k^L + C_E \left(C_t s^2 + \lambda_k^2 \right) u_{2k}^L = 0; \\ \left(\frac{\nu_1}{a_1} + C_E \bar{k}_2^2 \frac{2}{h_2} \right) u_{1k}^L - \frac{1}{l \lambda_k} \left(\left(1 + C_E C_t \right) s^2 + \bar{k}_1^2 \lambda_k^2 + \frac{l^2}{a_1^2} + C_E \left(\bar{k}_2^2 \lambda_k^2 + \frac{l^2}{a_2^2} \right) \right) w_k^L + \left(C_E \bar{k}_2^2 \frac{h_1}{h_2} - \bar{k}_1^2 \right) \psi_k^L + \\ + C_E \left(\frac{\nu_2}{a_2} - \bar{k}_2^2 \frac{2}{h_2} \right) u_{2k}^L = Q_k^L(s); \\ 2 C_E \left(C_t s^2 + \lambda_k^2 + 12 \frac{\bar{k}_2^2}{h_2^2} l^2 \right) \left[u_{2k}^L - u_{1k}^L \right] + 12 l \lambda_k \left(C_E \frac{\bar{k}_2^2}{h_2} - \frac{\bar{k}_1^2}{h_1} \right) w_k^L - \left(\left(1 + C_E C_t \right) s^2 + \left(\lambda_k^2 + 12 \frac{\bar{k}_1^2}{h_1^2} l^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + C_E \left(\lambda_k^2 + 12 \frac{\bar{k}_2^2}{h_2^2} l^2 \right) \right) \right) h_1 \psi_k^L = 0; \\ \left(s^2 + \lambda_k^2 \right) u_{1k}^L - \left(\frac{\nu_1}{a_1} + \frac{2 \bar{k}_1^2}{h_1} \right) l \lambda_k w_k^L - \left(s^2 + \lambda_k^2 + \frac{12 \bar{k}_1^2}{h_1^2} l^2 \right) \frac{h_1}{6} \psi_k^L = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где $Q_k^L(s)$ – изображение функции, характеризующей воздействующую на механическую систему нагрузку,

$$Q_k(t) = \frac{2l^2}{E_1'} \int_0^1 q(\xi, t) \sin \lambda_k \xi d\xi.$$

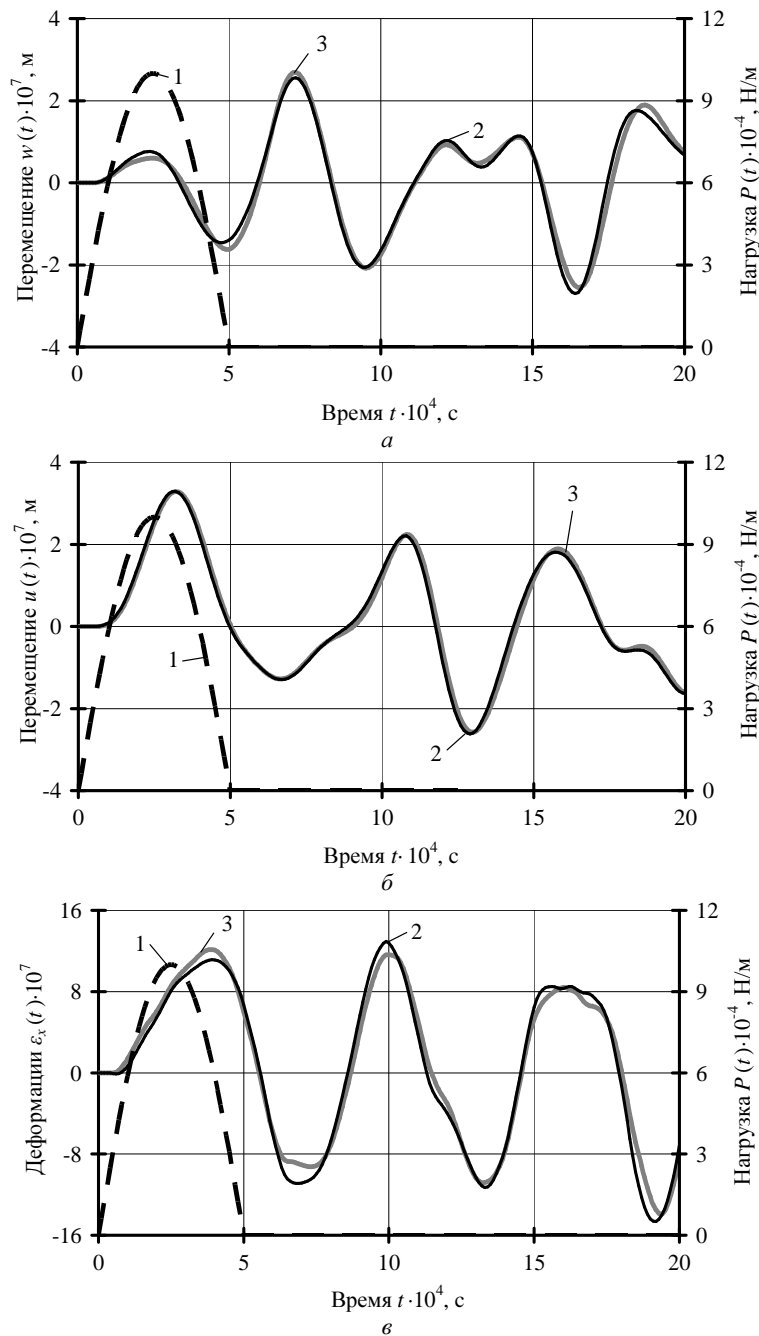


Рис. 3 – Изменение параметров оболочки: а – радиальных перемещений; б – осевых перемещений; в – деформаций.

Решив систему уравнений (9) методом Крамера, получим следующие выражения для определения изображений искомых коэффициентов:

$$u_{jk}^L(s) = \Delta_{jk}^U(s) / \Delta_k(s); \quad w_k^L(s) = \Delta_k^W(s) / \Delta_k(s); \quad \psi_k^L(s) = \Delta_k^\Psi(s) / \Delta_k(s), \quad (10)$$

где $\Delta_{jk}^U(s)$, $\Delta_k^W(s)$, $\Delta_k^\Psi(s)$ и $\Delta_k(s)$ – вспомогательные и главный определители матриц, составленных из коэффициентов системы линейных уравнений (9). Явные выражения для определения соответствующих определителей здесь не приводятся, поскольку они вычислялись непосредственно на ЭВМ.

Переход от изображений функций к их оригиналам осуществляется путем выполнения *обратного преобразования Лапласа*. Искомые выражения для кинематических параметров на основании (8) запишутся в форме ряда, как это показано далее на примере функции прогиба w

$$w(\xi, t) = -\frac{4l^2}{E_1'} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_k \xi_p \sin \lambda_k \xi_b \cos \lambda_k \xi}{\lambda_k} \int_0^t P(\tau) \sum_{i=1}^4 \frac{\Delta_k^W(\omega_{ik})}{\Delta_k'(\omega_{ik})/2} \sin \omega_{ik}(t-\tau) d\tau, \quad (11)$$

где ω_{ik} – модули мнимых корней уравнения $\Delta_k(s) = 0$; $P(t)$ – временная составляющая функции $q(\xi, t)$.

При исследовании деформированного состояния оболочки зачастую возникает необходимость определения деформаций, возникающих вдоль оси Ox . Деформации определяются по следующей зависимости:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (12)$$

где z – расстояние до нейтральной поверхности оболочки.

В случае измерения деформаций на внешней поверхности охватывающей оболочки и с учетом соотношений (6) можно записать следующее выражение для определения осевых деформаций:

$$\varepsilon_{2x} = \frac{1}{l} \left(2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} - \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \frac{h_1}{2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \right). \quad (13)$$

Тестовая задача решена с использованием следующих исходных данных: длины оболочек $l = 1.5$ м, внутренняя оболочка ($h_1 = 0.215$ м; $a_1 = 0.289$ м) изготовлена из стали ($\rho_1 = 7850$ кг/м³; $E_1 = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu_1 = 0.3$), а внешняя оболочка ($h_2 = 0.0215$ м; $a_2 = 0.5(h_1 + h_2) + a_1$) изготовлена из титана ($\rho_2 = 4600$ кг/м³; $E_2 = 1.1 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu_1 = 0.33$). Нагрузка определяется координатами: $x_p = 0.6$ м; $b_p = 0.15$ м.

На рис. 3 изображены графики изменения прогиба w , осевого перемещения u и осевых деформаций ε_x , возникающих на внешней поверхности наружной оболочки, в точке $x = 0.9$ м.

Кривая 1 соответствует функции, возмущающей нагрузки во времени, кривые 2 и 3 – указанные кинематические параметры, рассчитанные с помощью предлагаемого метода и рассчитанные с применением метода конечных элементов (МКЭ) соответственно.

Кривые, приведенные на рисунках, демонстрируют хорошее согласование результатов, полученных принципиально различными методами. Это свидетельствует о достоверности разработанной методики решения прямых задач для вложенных цилиндрических оболочек.

В случае подкрепления оболочки концентрическими ребрами жесткости (рис. 1, б), колебания оболочки под действием осесимметричной системы сил также можно рассматривать с использованием механической модели типа *модели Тимошенко* [8]. Переходя к безразмерным времени и координате вдоль оси оболочки согласно зависимостям:

$$x = \xi l, \quad t_p = tT,$$

где l – длина оболочки; $T = \sqrt{(\rho(1-\nu^2)l^2)/E}$; будем иметь:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\nu l}{a} \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{T^2}{\rho h} P_x(\xi, t); \\ \frac{\nu l}{a} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{l^2}{a^2} w - (k')^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - l(k')^2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{T^2}{\rho h} P_z(\xi, t); \\ -\frac{12l(k')^2}{h^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{12l^2(k')^2}{h^2} \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{12T^2}{\rho h^3} M_x(\xi, t). \end{cases} \quad (14)$$

Здесь E – модуль упругости материала оболочки, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность материала оболочки, a – радиус срединной поверхности, h – толщина оболочки, k' – коэффициент сдвига, $P_x(x; t)$, $P_z(x; t)$, $M_x(x; t)$ – интенсивность сил и моментов, действующих на оболочку.

Наличие ребра жесткости на оболочке обуславливает возникновение соответствующих контактных сил и моментов:

$$\begin{aligned} P_x(\xi, t) &= -p_x(t)[H(\xi - \xi_p) - H(\xi - \xi_p - l_p/l)]; \\ P_z(\xi, t) &= Q(\xi, t) - p_z(t)[H(\xi - \xi_p) - H(\xi - \xi_p - l_p/l)]; \\ M_x(\xi, t) &= \frac{h}{2} p_x(t)[H(\xi - \xi_p) - H(\xi - \xi_p - l_p/l)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (14) при нулевых начальных условиях и граничных условиях, соответствующих шарнирному опиранию, также можно найти в виде разложения в ряды *Фурье*, аналогичном (8).

Колебания ребра жесткости можно моделировать уравнениями стержневой теории, приведенными в [9]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_p F_p \frac{\partial^2 w_p}{\partial t^2} + \frac{E_p F_p}{R_p^2} w_p = P_{zp}; \\ \rho_p F_p \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} = P_{xp}; \\ \rho_p I_p \frac{\partial^2 \psi_{xp}}{\partial t^2} + \frac{E_p I_z}{R_p^2} \psi_{xp} = M_{xp}, \end{array} \right. \quad (16)$$

где I_z – момент инерции относительно оси z ; I_p – полярный момент инерции; P_{zp} , P_{xp} , M_p – радиальная и осевая силы и момент внешних сил, отнесенные к единице длины ребра.

Условия контакта исключают проскальзывание ребра на поверхности оболочки. Предполагается, что ширина зоны контакта оболочки с ребром по сравнению с длиной оболочки мала, поэтому условия контакта можно записать, как следующие:

$$w_p(t) = \frac{l}{l_p} \int_{\xi_p}^{\xi_p + \frac{l_p}{l}} w(\xi; t) d\xi; \quad u_p(t) - \frac{h_p}{2} \psi_p(t) = \frac{l}{l_p} \int_{\xi_p}^{\xi_p + \frac{l_p}{l}} \left(u(\xi; t) + \frac{h}{2} \psi(\xi; t) \right) d\xi. \quad (17)$$

Решив систему дифференциальных уравнений (16) с использованием преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях для безразмерного времени, на основе условий контакта (17) получаем *систему интегральных уравнений Вольтерра*, дальнейшее решение которой строится в последовательности, аналогичной (7).

Решение обратной задачи. Задача идентификации нестационарной нагрузки, воздействующей на систему вложенных цилиндрических оболочек, заключается в отыскании неизвестной нагрузки, воздействующей на одну из оболочек системы. В данном случае производится восстановление нагрузки, воздействующей на внутреннюю оболочку, по данным, регистрируемым в одной из точек на наружной стороне охватывающей оболочки. В качестве примера рассмотрим случай идентификации нагрузки по данным прогиба $w(t)$, который описывается заданной функцией во времени.

Для решения указанной задачи рассмотрим выражение (11) по определению прогиба $w(t)$. Выражение будет *линейным интегральным уравнением Вольтерра I-го рода* относительно функции $P(t)$. Перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\tilde{w}(\xi, t) = \int_0^t P(\tau) K(t - \tau) d\tau, \quad (18)$$

где $K(t) = -\frac{4l^2}{E_1'} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k \xi_p \sin \lambda_k \xi_b \cos \lambda_k \xi \sum_{i=1}^4 \frac{\Delta_k^W(\omega_k)}{\Delta_k'(\omega_k)/2} \sin \omega_k t$; $\tilde{w}(\xi, t)$ – задаваемый прогиб, который при решении обратной задачи считается известным.

При решении уравнения (18), вследствие некорректности задачи, будем использовать *метод регуляризации А. Н. Тихонова*. С этой целью воспользуемся матричной формой записи уравнения (18), применив аппроксимацию входящих в выражение интегралов

$$\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{A}_W \cdot \mathbf{P}, \quad (19)$$

где $\tilde{\mathbf{w}}$ – вектор-столбец, соответствующий функции прогиба w ; \mathbf{P} – вектор-столбец возмущающей нагрузки; \mathbf{A}_W – некоторый конечно-разностный аналог оператора, соответствующий ядру $K(t - \tau)$.

Последующее применение метода регуляризации А.Н. Тихонова, подробное описание которого изложено в [5, 6], приведет к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) следующего вида:

$$(\mathbf{A}_W^T \cdot \mathbf{A}_W + \alpha \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{P} = \mathbf{A}_W^T \cdot \tilde{\mathbf{w}}, \quad (20)$$

где \mathbf{A}_W^T – транспонированная к \mathbf{A}_W матрица; \mathbf{C} – симметричная трехдиагональная матрица, схема заполнения которой рассмотрена в [5]; α – параметр регуляризации.

Решение СЛАУ (20), в сочетании с рациональным подбором входящего в систему параметра регуляризации α , позволяет найти значение искомого вектора нагрузки \mathbf{P} .

Далее рассмотрим численные примеры идентификации нестационарного воздействия в виде двух синусоидальных полувольт с разной амплитудой, которые являются разнесенными вдоль оси времени. Результаты таких исследований для обратной задачи показаны на рис. 4.

На рис. 4, а приведены результаты восстановления нестационарной нагрузки, воздействующей на оболочку с геометрическими и механическими параметрами, рассмотренными при решении прямой задачи. Идентификация производилась по данным прогиба $\tilde{w}(t)$, регистрируемым в сечении с координатой $\xi = 0.6$.

Кривая 1 соответствует исходным значениям прогиба, полученным в результате решения прямой задачи, с

применением МКЭ; кривые 2, 3 – нагрузка, задаваемая при моделировании соответствующей прямой задачи и нагрузка, идентифицированная в процессе решения обратной задачи.

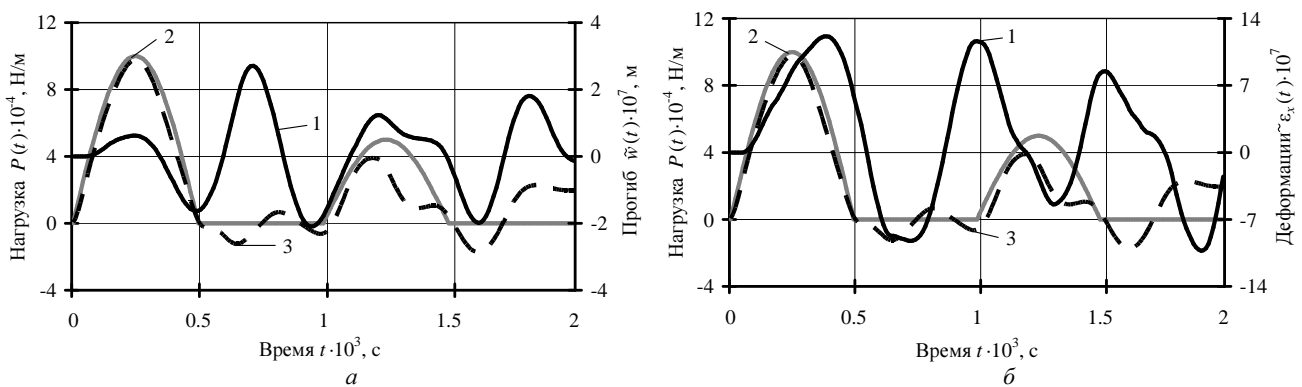


Рис. 4 – Результаты восстановления нагрузки: а – по прогибам; б – по деформациям.

Также приведены результаты решения обратной задачи при идентификации по данным осевых деформаций ε_x (рис. 4, б). Нумерация кривых на рисунке соответствует нумерации на рис. 4, а. Данные, представленные на рис. 4, свидетельствует о том, что процедура идентификации внешних нагрузок по значениям осевых деформаций и по нормальным перемещениям одинаково эффективна.

Решение обратной задачи для оболочки, подкрепленной ребром (ребрами) жесткости, вызывает необходимость решения системы интегральных уравнений Вольтера I-го рода, составленной на основе условий контакта и уравнения, описывающего изменение во времени одной из кинематических характеристик движения точки оболочки или деформации в некоторой точке. При этом присоединение каждого дополнительного ребра повлечет за собой необходимость введения дополнительной пары условий контакта. Решение получаемой при дискретизации СЛАУ можно произвести с использованием *обобщенного метода Гаусса* в совокупности с регуляризацией А. Н. Тихонова в виду некорректности поставленной задачи.

Выводы. В данной работе предложен метод идентификации временной составляющей нагрузки, воздействующей на шарнирно-опертые подкрепленные оболочки. Достоверность полученного решения тестовой задачи подтверждена сопоставлением с заранее известной функцией нагрузки. Ценность продемонстрированных подходов, используемых при решении прямой и обратной задач деформирования оболочек, заключается в возможности исследования составных конструкций, части которых изготовлены из различных материалов. Отыскание неизвестных нагрузок, воздействующих на подкрепленные оболочки, позволяет оценить напряженно-деформированное состояние ответственных конструкций с целью дальнейшего улучшения их свойств.

Список литературы

1. Луговой П. З., Мейш В. Ф., Штанцель Э. А. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. – К. : Изд. Полігр. центр «Київський ун-т», 2005. – 537 с.
2. Луговой П. З., Мейш В. Ф. Исследование ребристых взрывных камер при импульсной обработке материалов // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1989. – Вып. 54. – С. 79 – 82.
3. Луговой П. З., Мукоид В. П., Мейш В. Ф. Динамика оболочечных конструкций при взрывных нагрузках. – К. : Наукова думка, 1991. – 280 с.
4. Луговой П. З. Динамика тонкостенных конструкций при нестационарных нагрузках // Прикладная механика. – 2001. – Т. 37. – № 5. – С. 44 – 74.
5. Янютин Е. Г., Богдан Д. И., Воронай Н. И., Гнатенко Г. А., Гришакин В. Т. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел : монография в 2-х частях. Часть I. – Харьков : Изд-во ХНАДУ, 2010. – 180 с.
6. Янютин Е. Г., Воронай А. В., Поваляев С. И., Янчевский И. В. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел : монография в 2-х частях. Часть II. – Харьков : Изд-во ХНАДУ, 2010. – 212 с.
7. Шупиков А. Н., Бузько Я. П., Сметанкина Н. В., Угрюмов С. В. Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация. – Харьков : Изд-во ХНЭУ, 2004. – 252 с.
8. Григорюк Э. И., Селезов И. Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М. : ВИНТИ, 1973. – 272 с.
9. Кохманюк С. С., Янютин Е. Г., Романенко Л. Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. – К. : Наукова думка, 1980. – 232 с.

References (transliterated)

1. Lugovoy P. Z., Meysh V. F., Shtantsel' E. A. *Nestatsionarnaya dinamika neodnorodnykh obolocheknykh konstruktsey* [Non-stationary dynamics of inhomogeneous shell structures]. Kyiv, Izd. Poligr. Tsentр «Kiyevskiy universitet» Publ., 2005. 537 p.
2. Lugovoy P. Z., Meysh V. F. *Issledovanie rebristyykh vzryvnykh kamer pri impul'snoy obrabotke materialov* [Investigation of ribbed explosive chambers during pulsed processing of materials]. *Soprotivleniye materialov i teoriya sooruzheniy* [Strength of materials and construction theory]. 1989, vol. 54, pp. 79–82.
3. Lugovoy P. Z., Mukoid V. P., Meysh V. F. *Dinamika obolocheknykh konstruktsey pri vzryvnykh nagruzkakh* [Dynamics of shell structures under explosive loads]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1991. 280 p.
4. Lugovoy P. Z. *Dinamika tonkostennykh konstruktsey pri nestatsionarnykh nagruzkakh* [Dynamics of thin-walled structures under non-stationary loads]. *Priladnaya mekhanika* [Applied mechanics]. 2001, vol. 37, no. 5, pp. 44–74.

5. Yanyutin E. G., Bogdan D. I., Voropay N. I., Gnatenko G. A., Grishakin V. T. *Identifikaciya nagruzok pri impul'snom deformirovanii tel : monografiya v 2-kh chastyakh. Chast' I* [Identification of loads during impulsive deformation of bodies : monograph in 2 parts. Part I]. Kharkov, KhNADU Publ., 2010. 180 p.
6. Yanyutin E. G., Voropay A. V., Povalyaev S. I., Yanchevskiy I. V. *Identifikaciya nagruzok pri impul'snom deformirovanii tel : monografiya v 2-kh chastyakh. Chast' II* [Identification of loads during impulsive deformation of bodies : monograph in 2 parts. Part II]. Kharkov, KhNADU Publ., 2010. 212 p.
7. Shupikov A. N., Buz'ko Ya. P., Smetankina N. V., Ugrimov S. V. *Nestatsionarnye kolebaniya mnogosloynnykh plastin i obolochek i ikh optimizatsiya* [Non-stationary vibrations of multilayer plates and shells and their optimization]. Kharkov, KhNEU Publ., 2004. 252 p.
8. Grigolyuk E. I., Selezov I. T. *Mekhanika tverdykh deformiruemyykh tel. T.5. Neklassicheskie teorii kolebaniy sterzhney, plastin i obolochek* [Mechanics of solid deformable bodies. Vol. 5. Non-classical theory of vibrations of beams, plates, and shells]. Moscow, VINITI Publ., 1973. 272 p.
9. Kholmnyuk S. S., Yanyutin E. G., Romanenko L. G. *Kolebaniya deformiruemyykh sistem pri impul'snykh i podvizhnykh nagruzkakh* [Oscillations of deformable systems under pulsed and moving loads]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1980. 232 p.

Поступила (received) 12.10.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Янютин Євген Григорович (Янютин Евгений Григорьевич, Yanyutin Yevgeniy Grigoryevich) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: e.yanyutin@gmail.com.

Гнатенко Григорій Олександрович (Гнатенко Григорий Александрович, Gnatenko Grigiriy Alexandrovich) – кандидат технічних наук, старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (067) 799-08-41; e-mail: grisha_gnatenko@ukr.net.

Єгоров Павло Анатолійович (Егоров Павел Анатольевич, Yegorov Pavel Anatolyevich) – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (066) 225-33-51; e-mail: egorovpa@online.ua.